

X : Antennes à ouverture

Une antenne pouvant être considéré comme un dispositif à l'interface entre une énergie électromagnétique guidée et une énergie électromagnétique rayonnée, une des idées les plus simples pour réaliser cet interface consiste à pratiquer une ouverture dans un guide d'ondes, soit en réalisant une ou plusieurs fentes, soit en le laissant ouvert à son extrémité. Cette dernière solution conduisant généralement à une rupture d'impédance entre la propagation guidée et la propagation en espace libre, la transition est adoucie en évasant progressivement les bords du guide, ce qui conduit finalement à une antenne cornet. De fait, de nombreuses antennes peuvent s'apparenter à des antennes à ouvertures, y compris par exemple des antennes à réflecteur (Figure X-1)

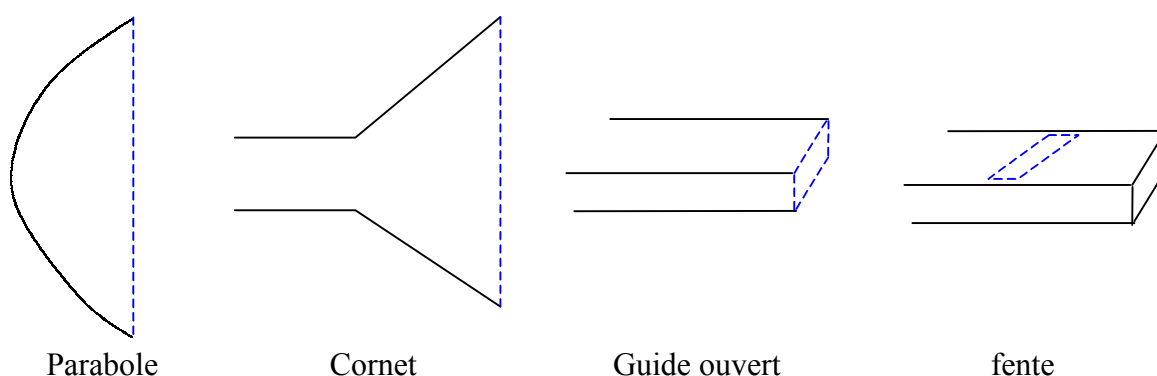


Figure X-1 : *exemples d'antennes à ouverture*

Notre objectif est essentiellement de déterminer les caractéristiques du champ lointain, mais il est intéressant de connaître au moins qualitativement, le comportement du champ au voisinage de ces ouvertures.

D) Les zones de champ derrière une ouverture.

Nous allons préciser le comportement du champ derrière l'ouverture à l'aide de deux paramètres : la décroissance du module du champ derrière l'ouverture, et l'évolution de la forme du diagramme de rayonnement au fur et à mesure que l'on s'éloigne de celle-ci. Une étude plus détaillée consisterait à analyser également l'évolution de la puissance réactive, de l'impédance d'onde, et de la sphéricité de l'onde (Cf thèse Sarah LAYBROS, Université P. SABATIER, Toulouse, Octobre 2004).

La zone la plus proche de l'ouverture est appelée zone de RAYLEIGH. C'est une zone d'interférence entre le champ direct qui traverse l'ouverture et le champ diffracté par les arêtes. Dans cette zone, le champ fluctue avec un niveau qui se maintient à peu près constant (à quelques dB près) jusqu'à la distance de RAYLEIGH égale à $D^2 / 2\lambda$ où D représente la dimension maximum de l'ouverture.

Le champ lointain est obtenu lorsque la forme du diagramme de rayonnement à l'infini est établie : la distance de l'ouverture vérifiant cette propriété est communément admise comme étant $2D^2 / \lambda$. La zone située au delà de cette distance est appelée zone de FRAUNHOFER.

Entre la zone de RAYLEIGH et la zone de FRAUNHOFER, il existe une zone intermédiaire dans laquelle le champ passe progressivement d'une zone d'interférence à une zone de champ lointain appelée zone de FRESNEL.

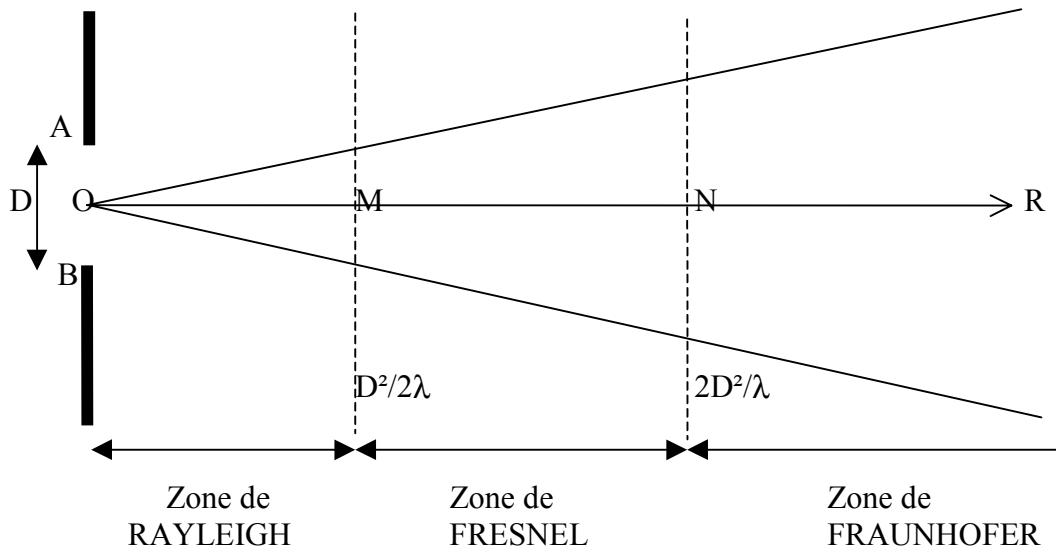


Figure X-1 : Représentation des zones de champ derrière une ouverture

Evaluons, pour le point M situé à la limite de la zone de RAYLEIGH, la différence de marche entre le rayon direct OM et le rayon diffracté AM :

$$AM - OM = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{D^2}{2\lambda}\right)^2} - \frac{D^2}{2\lambda} = \frac{D^2}{2\lambda} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{D}\right)^2} - 1 \right) \approx \frac{D^2}{2\lambda} \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{D^2} = \frac{\lambda}{4} \quad (\text{X-1})$$

Ainsi, dès que la dimension de l'ouverture est grande en termes de longueur d'onde, la distance de RAYLEIGH correspond sensiblement à une différence de marche de $\lambda/4$ entre le rayon direct traversant l'ouverture et le rayon diffracté par le bord de l'ouverture, soit donc un déphasage de $\pi/2$.

Un calcul analogue pour la distance de FRAUNHOFER montre que :

$$AN - ON = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{2D^2}{\lambda}\right)^2} - \frac{2D^2}{\lambda} = \frac{2D^2}{\lambda} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{4D}\right)^2} - 1 \right) \approx \frac{2D^2}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{16D^2} = \frac{\lambda}{16} \quad (\text{X-2})$$

Le critère définissant la zone de FRAUNHOFER indique que l'on considère que la zone de champ lointain est atteinte lorsque le déphasage maximum entre les sources de l'ouverture est inférieur à $\pi/8$, ce qui correspond à une différence de marche de $\lambda/16$.

Derrière l'ouverture et dans l'axe de l'ouverture, le module du champ présente l'allure que l'on observe sur la figure (X-2) : on y retrouve la zone de RAYLEIGH avec ses interférences, la zone de FRAUNHOFER avec sa décroissance du champ en $1/r$, et la zone intermédiaire de FRESNEL.

La figure X-3 montre le détail de la zone de RAYLEIGH qui comprend des oscillations d'amplitude croissante jusqu'à la zone de FRESNEL. On constate que globalement, dans cette zone, l'amplitude des maxima du champ varie peu : c'est une zone où l'énergie reste confinée dans un tube ayant la forme de l'ouverture. Un faisceau LASER, dans toute la région où il reste concentré, peut être interprété comme la zone de RAYLEIGH du rayonnement d'une ouverture lumineuse.

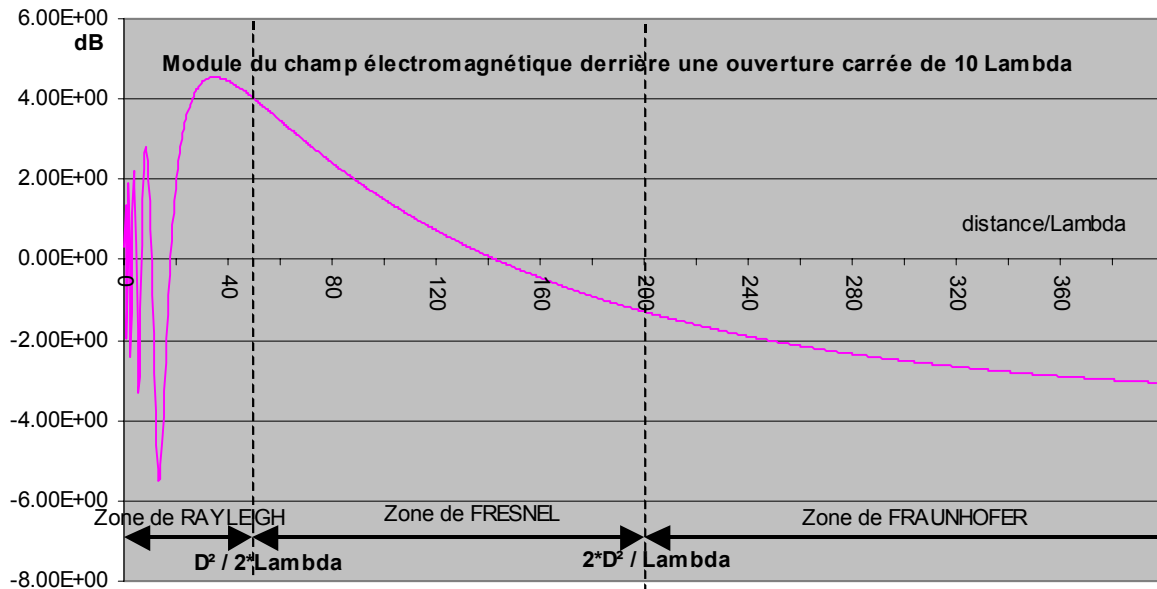


Figure X-2 : Représentation du module du champ électrique derrière une ouverture carrée de 10λ , dans l'axe de l'ouverture illuminée en onde plane.

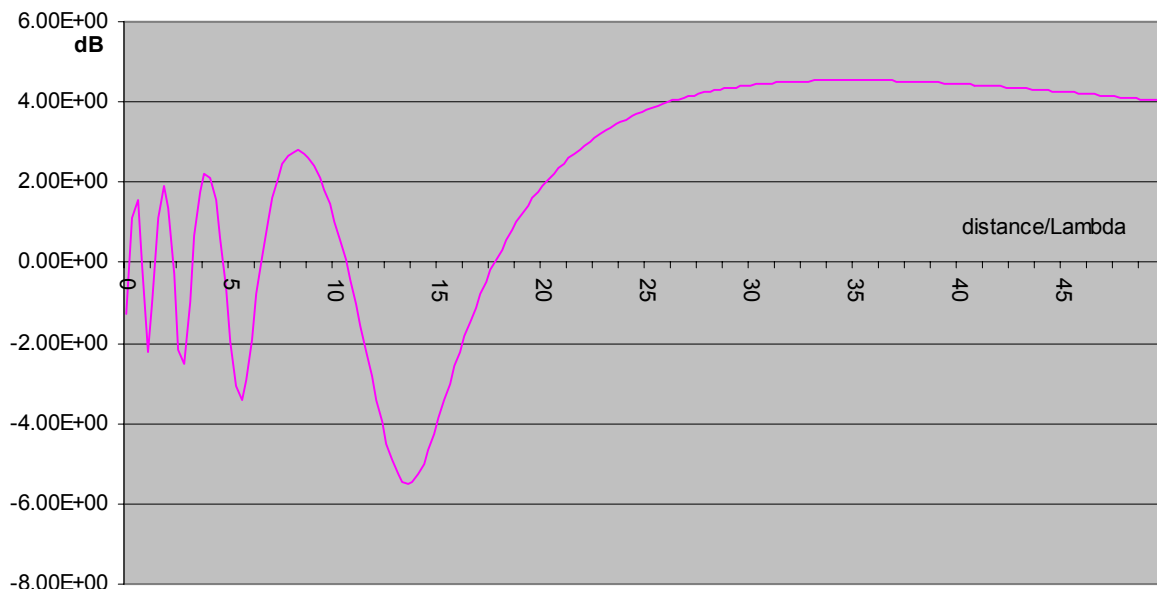


Figure X-3 : Représentation du module du champ électrique derrière une ouverture carrée de 10λ , dans l'axe de l'ouverture : détail de la zone de RAYLEIGH.

La figure X-4 représente l'évolution des diagrammes de rayonnement obtenus lorsqu'on se place à des distances croissantes d'une ouverture en 2 dimensions (fente) illuminée par une onde plane. Le module du champ est calculé sur un demi-cercle centré sur l'ouverture.

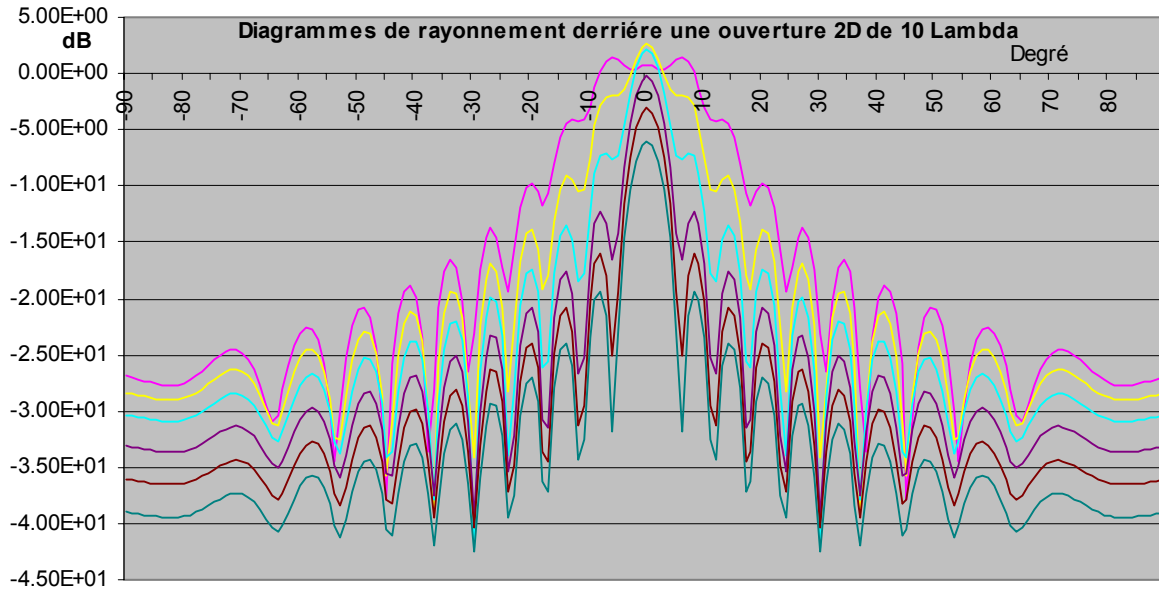


Figure X-4 : Diagrammes de rayonnement d'une ouverture, calculés aux distances de 10λ , 20λ , 30λ , 50λ , 100λ , 200λ , 400λ

On constate que le diagramme de rayonnement prend sa forme définitive aux environs de la zone de FRAUNHOFER, soit aux environs de 200λ pour une ouverture de 10λ .

II) Le calcul du diagramme de rayonnement en champ lointain derrière une ouverture.

Le champ rayonné est calculé en application du théorème d'équivalence. L'utilisation de ce théorème alors que les conditions d'applications ne sont pas toutes remplies (en toute rigueur, il ne s'applique qu'à des surfaces fermées, délimitant un volume contenant les sources) conduit à des résultats approchés, mais dont l'expérience montre qu'ils traduisent assez bien les caractéristiques importantes du champ rayonné.

Nous allons traiter en détail le rayonnement d'une ouverture rectangulaire. Dans la calcul qui va être conduit, nous ferons de plus les hypothèses suivantes :

- Le plan d'ouverture sera le plan xOy.
- Le champ électromagnétique a la structure d'une onde plane dans l'ouverture :

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (\vec{H} \wedge \vec{U}) \quad (X-3)$$

Dans ces conditions, si on suppose \vec{E} dirigé suivant l'axe des x, la direction de \vec{H} est imposé suivant l'axe des y, et celle de \vec{U} direction de propagation suivant l'axe des z, car le trièdre $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{U})$ doit être direct.

- Les champs électromagnétiques auront une phase constante sur l'ouverture.
- Les champs électromagnétiques sont séparables en x et en y : bien que paraissant restrictive, cette hypothèse est très souvent valide en propagation guidée, ou pour des ondes stationnaires.

Lorsqu'une ou plusieurs de ces hypothèses ne seront pas vérifiées, il faudra inclure dans les calculs, les conditions particulières au problème traité.

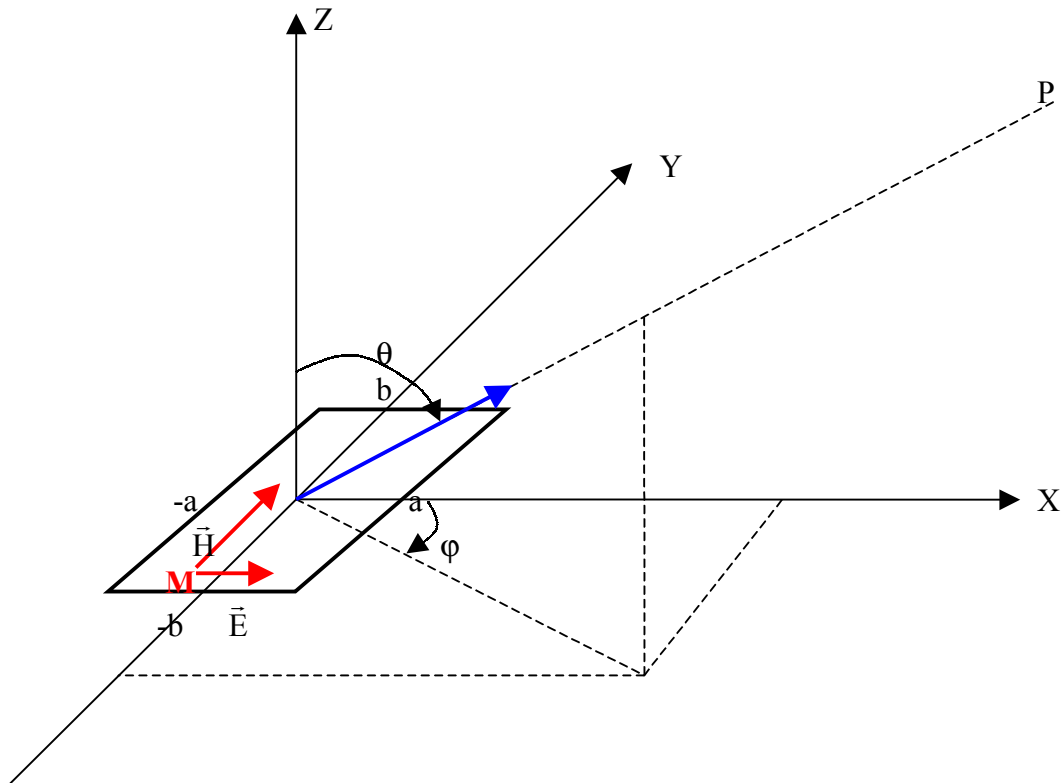


Figure X-5 : représentation de l'ouverture et du repère polaire associé.

On posera $\vec{E}_x = E_x \vec{e}_x$, ce qui impose : $\vec{H}_y = \frac{E_x}{\eta} \vec{e}_y$.

D'où on déduit les courants électriques et magnétiques équivalents sur l'ouverture, en notant que la normale « extérieure » à la surface est orientée suivant Oz :

$$\vec{J}_e = \vec{n} \Lambda \vec{H}_y = \vec{n} \Lambda \frac{E_x}{\eta} \vec{e}_y = -\frac{E_x}{\eta} \vec{e}_x \quad (\text{X-4})$$

$$\vec{J}_m = -(\vec{n} \Lambda \vec{E}_x) = -E_x \vec{e}_y \quad (\text{X-5})$$

Le champ électrique rayonné au point d'observation P est obtenu en utilisant l'intégrale de rayonnement généralisée :

$$\vec{E}(P) = \frac{j\mathbf{k}}{4\pi} \psi(R) \iint_S \left\{ \left(\eta (\vec{J}_e \wedge \vec{U}) - \vec{J}_m \right) \wedge \vec{U} \right\} e^{j\vec{k} \cdot \vec{OM}} ds \quad (X-6)$$

qui devient, après substitution des courants électriques et magnétiques (X-4) et (X-5) :

$$\vec{E}(P) = \frac{j\mathbf{k}}{4\pi} \psi(R) \iint_S E_x \left\{ \left((-\vec{e}_x \wedge \vec{U}) + \vec{e}_y \right) \wedge \vec{U} \right\} e^{j\vec{k} \cdot \vec{OM}} ds \quad (X-7)$$

Il faut évaluer les trois produits vectoriels en coordonnées polaires :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{U} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \varphi \\ -\cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (X-8)$$

$$(\vec{e}_x \wedge \vec{U}) \wedge \vec{U} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ -\cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (X-9)$$

$$\vec{e}_y \wedge \vec{U} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ -\cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (X-10)$$

qui permettent d'écrire l'intégrale (X-7) sous la forme :

$$\vec{E}(P) = \frac{j\mathbf{k}}{4\pi} \psi(R) (1 + \cos \theta) (\cos \varphi \vec{e}_\theta - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) F \quad (X-11)$$

avec :

$$F = \iint_S E_x(x, y) e^{j\vec{k} \cdot \vec{OM}} ds \quad (X-12)$$

Le produit scalaire se développe de la façon suivante :

$$\vec{k} \cdot \vec{OM} = \begin{pmatrix} k \sin \theta \cos \varphi \\ k \sin \theta \sin \varphi \\ k \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = kx \sin \theta \cos \varphi + ky \sin \theta \sin \varphi \quad (X-13)$$

d'où l'expression de F :

$$F = \iint_S E_x(x, y) e^{j(kx \sin \theta \cos \varphi + ky \sin \theta \sin \varphi)} ds \quad (X-14)$$

En utilisant l'hypothèse d'une distribution de champ séparable en x et en y :

$$E_x(x, y) = E_x(x) \cdot E_x(y) \quad (X-15)$$

On peut décomposer l'intégrale double F en un produit de deux intégrales simples :

$$F = \int_{-a}^a E_x(x) e^{jkx \sin \theta \cos \varphi} dx \int_{-b}^b E_x(y) e^{jky \sin \theta \sin \varphi} dy = F_x F_y \quad (\text{X-16})$$

On notera que la décomposition du champ suivant l'expression (X-15) doit respecter les équations aux dimensions : $E_x(x,y)$ est exprimé en $(V.m^{-1})$, tandis que $E_x(x)$ et $E_x(y)$ sont exprimés en $(V.m^{-1})^{1/2}$.

Enfin, une ultime condensation d'écriture :

$$k_x = k \sin \theta \cos \varphi \quad \text{et} \quad k_y = k \sin \theta \sin \varphi \quad (\text{X-17})$$

conduit aux expressions suivantes :

$$F_x = \int_{-a}^a E_x(x) e^{jk_x x} dx \quad \text{et} \quad F_y = \int_{-b}^b E_x(y) e^{jk_y y} dy \quad (\text{X-18})$$

On reconnaît, dans les expressions (X-18), les transformées de FOURIER spatiales (à une constante multiplicative près) des champs électromagnétiques présents dans l'ouverture. On en déduit, de manière très générale, que pour une ouverture de faibles dimensions devant la longueur d'onde, le diagramme de rayonnement sera très large : à la limite, pour une source ponctuelle, il est obligatoirement omnidirectionnel dans certaines directions. A l'inverse, pour une ouverture très large en termes de longueur d'onde, le rayonnement sera forcément très directif.

Ces remarques sur la directivité du rayonnement en fonction des dimensions ont une portée très générale, et s'appliquent à tous les types d'antennes.

En résumé, le champ rayonné par l'ouverture est donné par l'expression suivante :

$$\vec{E}(P) = \frac{j\mathbf{k}}{4\pi} \psi(R) (1 + \cos \theta) (\cos \varphi \vec{e}_\theta - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) F_x F_y \quad (\text{X-19})$$

où F_x et F_y sont exprimés ci-dessus en (X-18)

III) Exemples de rayonnement pour quelques distributions de champ dans l'ouverture.

III-1) Distribution de champ uniforme

On fait l'hypothèse que le champ présent dans l'ouverture a la structure d'une onde plane, donc équiphase et constante en amplitude.

Lorsqu'on examine ce problème en réception, on conclut que pour une surface donnée, l'antenne qui est capable de récupérer toute l'énergie qui tombe sur cette surface a le gain maximum physiquement réalisable. Ce phénomène est mis en œuvre dans les antennes à réflecteur parabolique.

La représentation de l'amplitude du champ électrique présent dans l'ouverture, suivant l'une des dimensions du rectangle est représentée figure X-6.

E_x

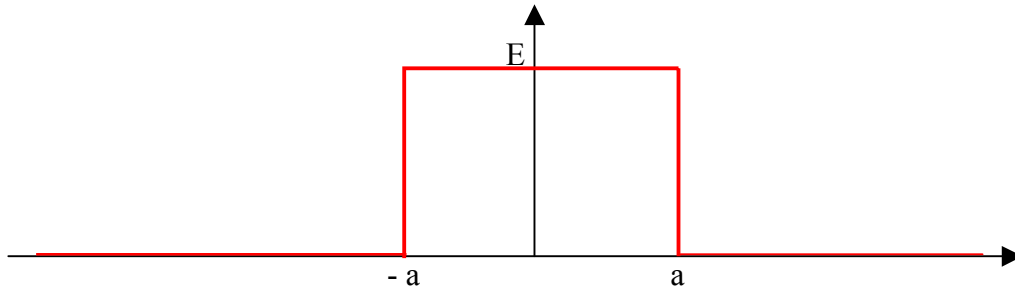


Figure X- 6 : Représentation de l'amplitude du champ uniforme dans l'ouverture

Dans ces conditions, les termes F_x et F_y de l'intégrale de rayonnement se calculent de manière analogue. Il vient :

$$F_x = E \int_{-a}^a e^{jkx \sin \theta \cos \varphi} dx = \left[\frac{e^{jkx \sin \theta \cos \varphi}}{jk \sin \theta \cos \varphi} \right]_{x=-a}^{x=a} = 2aE \frac{\sin(ka \sin \theta \cos \varphi)}{ka \sin \theta \cos \varphi} \quad (X-20)$$

$$F_x = 2aE \frac{\sin U}{U} \quad \text{avec} \quad U = ka \sin \theta \cos \varphi \quad (X-21)$$

$$F_y = 2bE \frac{\sin V}{V} \quad \text{avec} \quad V = kb \sin \theta \sin \varphi \quad (X-22)$$

On notera que l'on retrouve bien dans (X-21) et (X-22) les transformées de FOURIER spatiales de la fonction porte qui représente l'amplitude du champ dans l'ouverture.

Le rayonnement dans une direction quelconque de l'espace s'obtient en reportant les expressions de F_x et F_y dans (X-19).

Pour une étude paramétrique suivant une dimension du rectangle de l'ouverture, on restreint en général la représentation du diagramme de rayonnement au plan qui contient cette dimension.

Si nous choisissons cette dimension portée par l'axe des x, il nous faut exprimer le diagramme de rayonnement dans le plan $\varphi = 0$, ce qui implique : $\cos \varphi = 1$ et $\sin \varphi = 0$.

On obtient alors :

$$F_x = 2aE \frac{\sin(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \quad (X-23)$$

$$F_y = 2bE \quad (X-24)$$

D'où l'expression du champ rayonné dans le plan $\varphi = 0$:

$$\vec{E}(P) = \frac{jk}{4\pi} \psi(R) (1 + \cos \theta) \left[2aE \frac{\sin(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right] 2bE \vec{e}_\theta \quad (X-25)$$

et le diagramme de rayonnement non normalisé correspondant :

$$E(\theta) = (1 + \cos \theta) \frac{\sin(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \quad (X-26)$$

On peut visualiser l'évolution du diagramme de rayonnement en fonction de la dimension de l'ouverture égale à $2a$ (Figure X-7, X-8, X-9, X-10).

La représentation de l'amplitude a été volontairement tronquée à -40dB , la partie inférieure étant inutile à la compréhension des phénomènes et enlevant de la lisibilité à la représentation.

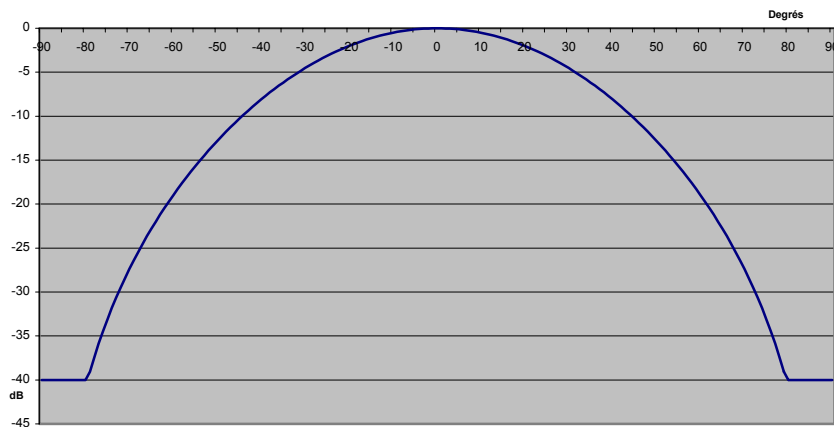


Figure X-7 : *Diagramme de rayonnement d'une ouverture de largeur $2a = \lambda$, illuminée en champ uniforme.*

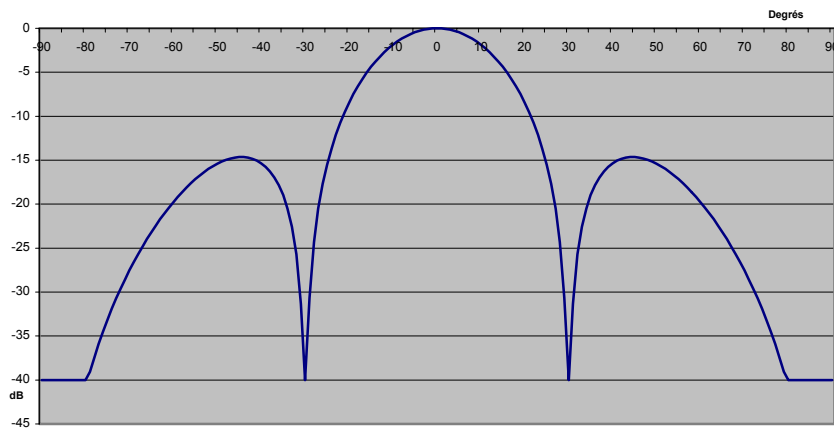


Figure X-8 : *Diagramme de rayonnement d'une ouverture de largeur $2a = 2\lambda$, illuminée en champ uniforme.*

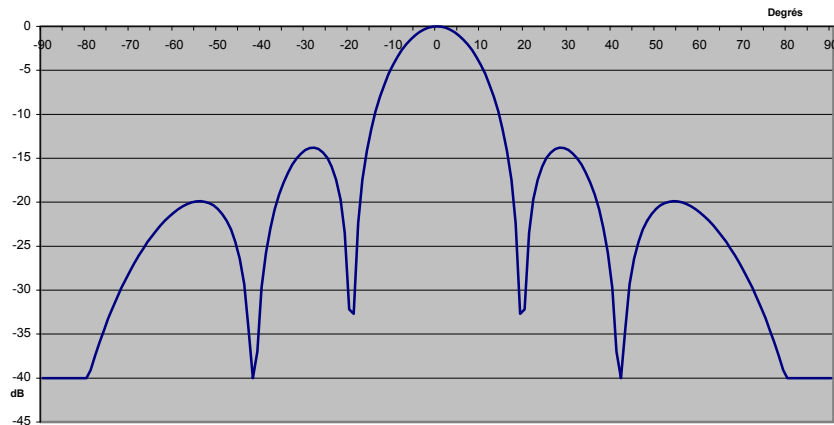


Figure X-9 : *Diagramme de rayonnement d'une ouverture de largeur $2a = 3\lambda$, illuminée en champ uniforme.*

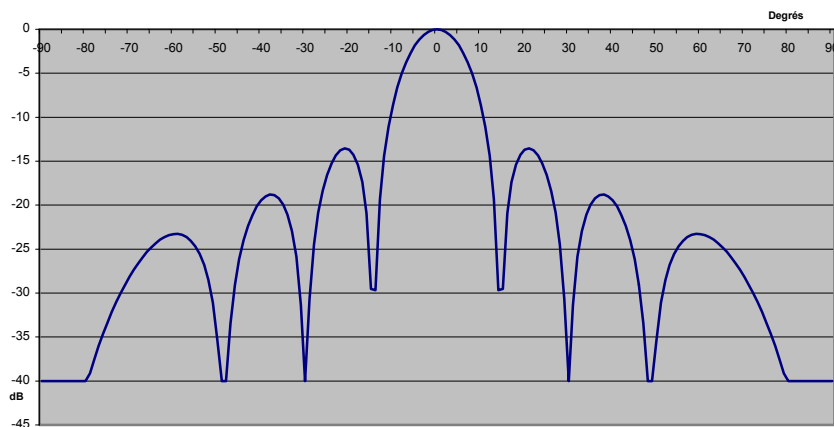


Figure X-10 : *Diagramme de rayonnement d'une ouverture de largeur $2a = 4\lambda$, illuminée en champ uniforme.*

Les principaux phénomènes observés sont les suivants :

- Le diagramme de rayonnement devient de plus en plus directif au fur et à mesure que la dimension de l'ouverture augmente.
- Pour une ouverture de dimension $n\lambda$, il y a $(n-1)$ lobes secondaires de chaque côté du lobe principal.
- Les lobes secondaires ont un maximum relativement élevé (de l'ordre de -15 dB)

III-1) Distribution de champ à décroissance linéaire vers les bords de l'ouverture.

Afin d'éviter des effets de diffraction par les bords de l'ouverture, il est quelquefois intéressant de faire en sorte que le champ électromagnétique au voisinage des bords soit le plus faible possible, voire nul. Sa décroissance à partir d'une valeur maximum au centre de l'ouverture à généralement une forme sinusoïdale (dans le cas des guides d'onde par exemple), mais l'étude d'une décroissance linéaire permet de bien mettre en évidence les effets de cette décroissance du champ, également appelée apodisation.

La représentation de l'amplitude du champ électrique présent dans l'ouverture, suivant l'une ou l'autre des dimensions du rectangle est représentée figure X-11.

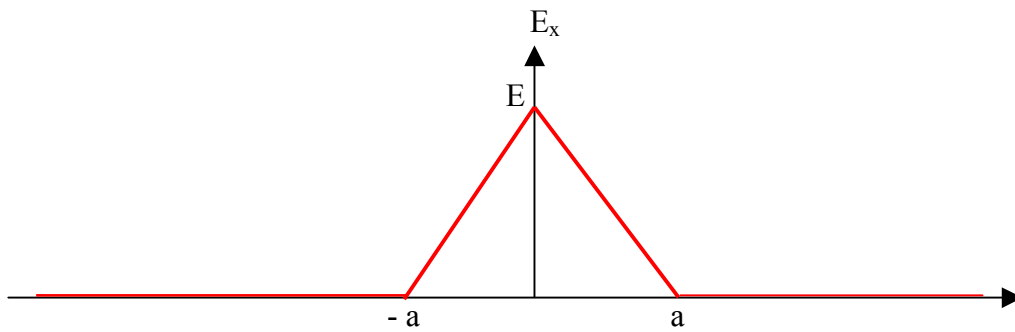


Figure X-11 : Représentation de l'amplitude du champ apodisé linéairement dans l'ouverture

Les équations des droites portant chacun des segments de décroissance dans l'ouverture sont les suivantes :

$$E_x = (E/a) x + E \quad \text{et} \quad E_x = - (E/a) x + E \quad (\text{X-27})$$

Les termes F_x et F_y de l'intégrale de rayonnement se calculent de manière analogue. Il vient :

$$F_x = \int_{-a}^0 \left(\frac{E}{a} x + E \right) e^{jkx \sin \theta \cos \varphi} dx + \int_0^a \left(- \frac{E}{a} x + E \right) e^{jkx \sin \theta \cos \varphi} dx \quad (\text{X-28})$$

$$F_x = \frac{E}{a} \int_{-a}^0 x \cdot e^{jkx \sin \theta \cos \varphi} dx - \frac{E}{a} \int_0^a x \cdot e^{jkx \sin \theta \cos \varphi} dx + E \int_{-a}^a e^{jkx \sin \theta \cos \varphi} dx \quad (\text{X-29})$$

Une double intégration par parties permet de calculer les deux premières intégrales. On obtient après quelques calculs :

$$F_x = aE \left(\frac{\sin U}{U} \right)^2 \quad \text{avec} \quad U = k a \sin \theta \cos \varphi / 2 \quad (\text{X-30})$$

$$F_y = bE \left(\frac{\sin V}{V} \right)^2 \quad \text{avec} \quad V = k b \sin \theta \sin \varphi / 2 \quad (\text{X-31})$$

Ces expressions pouvaient être obtenues plus rapidement en notant qu'une fonction triangle de largeur $2a$ est égal au produit de convolution d'une porte de largeur $4a$ par elle-même. Après prise en compte du facteur d'échelle, la transformée de Fourier spatiale du triangle est donc égale au carré de la transformée de Fourier spatiale de la fonction porte.

Le rayonnement dans une direction quelconque de l'espace s'obtient en reportant les expressions de F_x et F_y dans (X-19).

Pour une étude paramétrique suivant une dimension du rectangle de l'ouverture, on restreint en général la représentation du diagramme de rayonnement au plan qui contient cette dimension.

Si nous choisissons cette dimension portée par l'axe des x, il nous faut exprimer le diagramme de rayonnement dans le plan $\varphi = 0$, ce qui implique : $\cos \varphi = 1$ et $\sin \varphi = 0$.

On obtient alors :

$$F_x = aE \left(\frac{\sin \left(\frac{ka \sin \theta}{2} \right)}{\frac{ka \sin \theta}{2}} \right)^2 \quad (X-32)$$

$$F_y = bE \quad (X-33)$$

D'où l'expression du champ rayonné dans le plan $\varphi = 0$:

$$\vec{E}(P) = \frac{jk}{4\pi} \psi(R) (1 + \cos \theta) aE \left(\frac{\sin \left(\frac{ka \sin \theta}{2} \right)}{\frac{ka \sin \theta}{2}} \right)^2 bE \vec{e}_\theta \quad (X-34)$$

et le diagramme de rayonnement non normalisé correspondant :

$$E(\theta) = (1 + \cos \theta) \left(\frac{\sin \left(\frac{ka \sin \theta}{2} \right)}{\frac{ka \sin \theta}{2}} \right)^2 \quad (X-35)$$

Comme dans le cas de l'illumination uniforme, on peut visualiser l'évolution du diagramme de rayonnement en fonction de la dimension de l'ouverture égale à $2a$ (Figure X-12, X-13, X-14, X-15).

La représentation de l'amplitude a été volontairement tronquée à -40dB , la partie inférieure étant inutile à la compréhension des phénomènes et enlevant de la lisibilité à la représentation

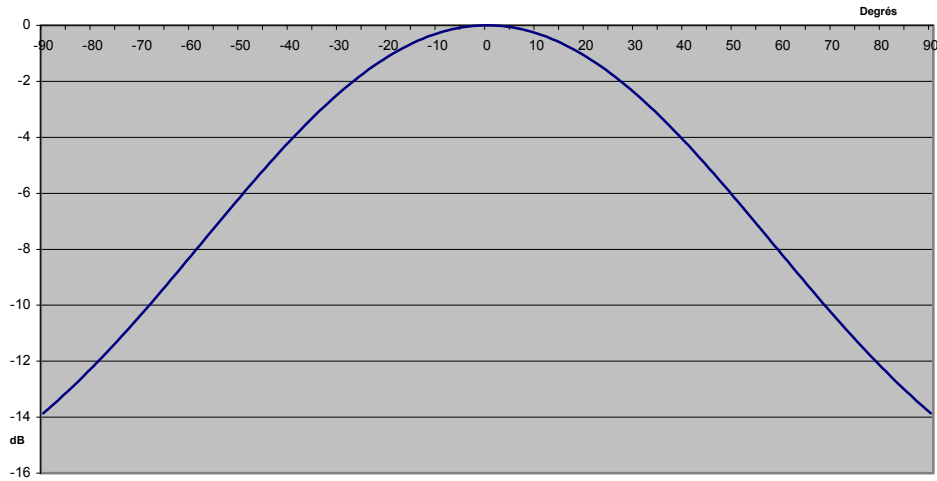


Figure X-12 : *Diagramme de rayonnement d'une ouverture de largeur $2a = \lambda$, illuminée en champ apodisé triangulaire.*

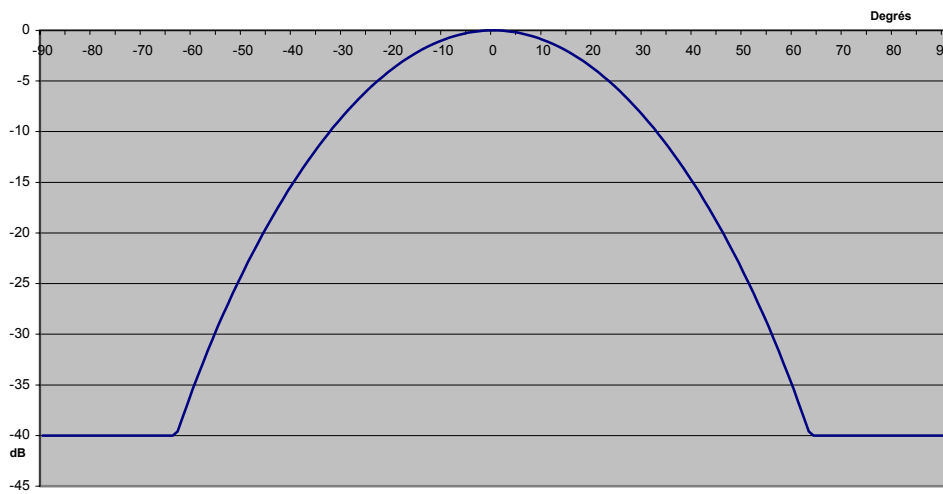


Figure X-13 : *Diagramme de rayonnement d'une ouverture de largeur $2a = 2\lambda$, illuminée en champ apodisé triangulaire.*

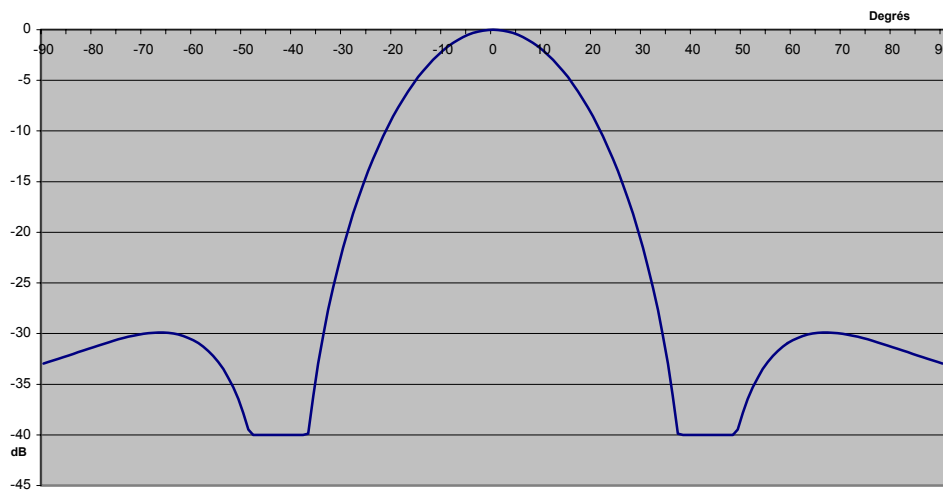


Figure X-14 : *Diagramme de rayonnement d'une ouverture de largeur $2a = 3\lambda$, illuminée en champ apodisé triangulaire.*

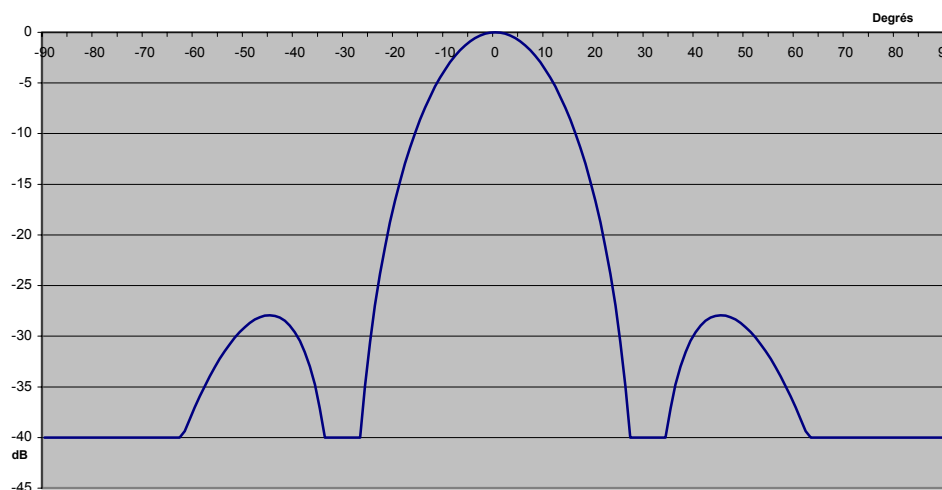


Figure X-15 : Diagramme de rayonnement d'une ouverture de largeur $2a = 4\lambda$, illuminée en champ apodisé triangulaire.

A dimension égale, la comparaison avec une illumination uniforme montre :

- une augmentation de la largeur du lobe principal : le rayonnement est donc moins directif. Ce résultat ne doit pas surprendre car la directivité maximum est obtenue pour une illumination uniforme.
- Un niveau d'amplitude plus faible des lobes secondaires.

Cette dernière remarque se généralise à tous les types d'antennes et plus particulièrement les antennes réseaux. Une technique efficace d'abaissement des lobes secondaires est obtenue en diminuant la pondération en amplitude des éléments du réseau au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre de l'antenne.

IV) Une technique numérique simple de calcul du rayonnement d'une ouverture.

Lorsque la forme de l'ouverture est quelconque, ou lorsque la distribution du champ dans l'ouverture n'est pas décrite par une fonction analytique, on peut développer la technique numérique suivante (Figure X-16) :

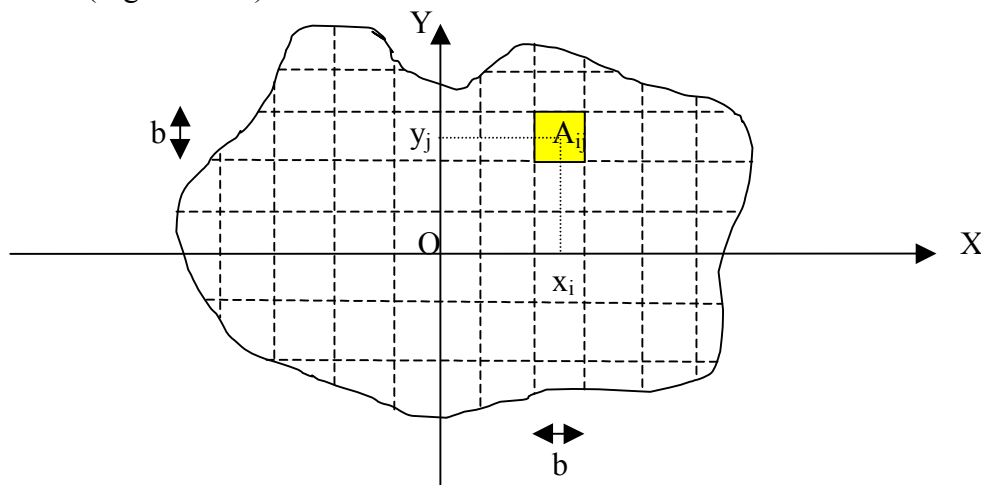


Figure X-16 : Surface de l'ouverture discrétisée en pavés élémentaires $A_{i,j}$.

On discrétise l'ouverture en pavés élémentaires A_{ij} de côté b , à l'intérieur desquels on peut considérer le champ électromagnétique comme ayant une valeur constante. Dans ces conditions, les calculs viennent comme suit :

$$F = \iint_S E(x, y) e^{j(kx \sin \theta \cos \varphi + ky \sin \theta \sin \varphi)} dx dy \quad (X-36)$$

$$F = \sum_{i,j} \left\{ \iint_S E_{i,j} e^{j(kx \sin \theta \cos \varphi + ky \sin \theta \sin \varphi)} dx dy \right\} \quad (X-37)$$

$$F = \sum_{i,j} \left\{ E_{i,j} \iint_S e^{j(kx \sin \theta \cos \varphi + ky \sin \theta \sin \varphi)} dx dy \right\} \quad (X-38)$$

$$F = \sum_{i,j} \left\{ E_{i,j} \int_{X_i - \frac{b}{2}}^{X_i + \frac{b}{2}} e^{j(kx \sin \theta \cos \varphi)} dx \int_{Y_j - \frac{b}{2}}^{Y_j + \frac{b}{2}} e^{j(ky \sin \theta \sin \varphi)} dy \right\} \quad (X-39)$$

$$F = b^2 \frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \theta \cos \varphi\right)}{\frac{kb}{2} \sin \theta \cos \varphi} \frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \theta \sin \varphi\right)}{\frac{kb}{2} \sin \theta \sin \varphi} \sum_{i,j} \left\{ E_{i,j} e^{jk(X_i \sin \theta \cos \varphi + Y_j \sin \theta \sin \varphi)} \right\} \quad (X-40)$$